Μάθημα 18ο 22/04/16

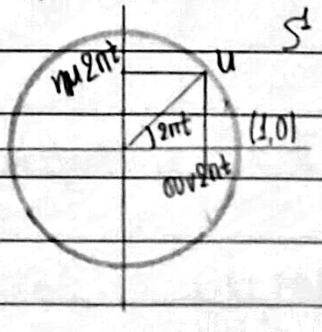
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 5

ΑΣΚΗΣΗ 1:

$\varphi : \mathbb{R} \to S^1$ ομομορφισμός ομάδων

$S^1 \leq \mathbb{C}^*$, $S^1 = \{(a+bi) \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2+b^2=1\} = \{συν2\pi t + iημ2\pi t \ , t \in \mathbb{R}\}$

$(1,0) \in S^1$ μοναδιαίο



$\|u \cdot v\| = \|u\| \cdot \|v\|$

$u, v \in S^1 \Rightarrow u \cdot v \in S^1$

$\varphi(t) = \text{συν}2\pi t + i\,\text{ημ}2\pi t$

$\varphi(t+t') = \text{συν}2\pi(t+t') + i\,\text{ημ}2\pi(t+t') = \text{συν}2\pi t\ \text{συν}2\pi t' - \text{ημ}2\pi t\,\text{ημ}2\pi t'$

$+ i\,\text{ημ}2\pi t\,\text{συν}2\pi t' + i\,\text{συν}2\pi t\,\text{ημ}2\pi t'$

$= (\text{συν}2\pi t + i\,\text{ημ}2\pi t)(\text{συν}2\pi t' + i\,\text{ημ}2\pi t') =$

$= \varphi(t)\cdot\varphi(t')$

Επί $\forall\, \text{συν}2\pi a + i\,\text{ημ}2\pi a \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ ώστε $\varphi(a) = \text{συν}2\pi a + i\,\text{ημ}2\pi a$

1º Θ.Ι. $\Rightarrow \mathbb{R}/_{\ker\varphi} \cong S^1$

$\ker\varphi = \{r \mid \text{συν}2\pi r + i\,\text{ημ}2\pi r = 1\}$

$\text{συν}2\pi r = 1$ και $\text{ημ}2\pi r = 0$

$r \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \cong S^1$

ΑΣΚΗΣΗ 2:

$O(3) = \{$ορθογώνιοι 3×3 πίνακες$\} \longrightarrow$ ΟΜΑΔΑ

$AA^t = 1 \Leftrightarrow A^{-1} = A^t$

$\det A = \pm 1$

$SO(3) = \{A$ ορθογώνιος, $\det A = 1\}$

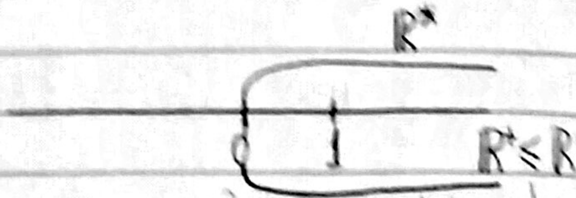
Ομάδα $A, B \in O(3) \Rightarrow AB \in O(3)$

$(AB)(AB)^t = ABB^tA^t = AIA^t = AA^t = I$ άρα όντως $AB \in O(3)$

Είναι $SO(3) \leq O(3)$;

$A, B \in SO(3) \to AB \in SO(3)$
$\det(AB) = \det A \det B = 1$

$S'O(3) = \{$ορθογώνιος, $\det A = -1\}$



$\det A \det B = (-1)(-1) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Διατηρούν τον προσανατολισμό τους $\det = 1$
το μήκος κάθε γραμμής και στήλης είναι 1)

$A, B \in SO(3)$

$O(A) = 2 = O(B)$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ δηλ. A, B αντιμετατίθενται.

$\langle A, B \rangle = \{I, A, B, AB\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Θα μπορούσα $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$?? ΟΧΙ αν $A+A$ σε πετάει έξω

οι άλλες μετά το Πάσχα!

R δακτύλιος, $S \leq R$ υποδακτύλιος
$S \trianglelefteq R$ ιδεώδες (καλός υποδακτύλιος)
$\Leftrightarrow S \leq R$ και ισχύει $\forall r \in R$ και $\forall s \in S \to rs, sr \in S$

π.χ. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ αλλά $\mathbb{Z} \ntrianglelefteq \mathbb{Q}$.

Ένα ιδεώδες θα το συμβολίζουμε με $I \trianglelefteq R$. Τότε ορίζεται R/I

Με $R/I = \{I + r$ ή $r + I \mid r \in R\}$ σύνολο συμπλόκων ως προς I

Ορίζουμε δύο πράξεις στο R/I

Με την πρόσθεση R/I είναι αβελιανή ομάδα γιατί ο R είναι αβελιανή ομάδα

Ορίζουμε γινόμενο: $(I+r)\odot(I+r') = I + rr'$

Το γινόμενο είναι καλά ορισμένο:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } I+r = I+s \Leftrightarrow r-s\in I \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (s-r\in I) \\ \quad I+r' = I+s' \Leftrightarrow r'-s'\in I \end{array}\right\} (*)$$

Πρέπει $I+rr' = I+ss' \Leftrightarrow rr'-ss'\in I$

$rr'-ss'\in I$ όταν $(*)$

$$rr'-sr'+sr'-ss' = \underbrace{\underbrace{\underbrace{(r-s)}_{\in I}\,\underbrace{r'}_{\in R}}_{\in I} + \underbrace{s\,\underbrace{(r'-s')}_{\in I}}_{\in I}}_{\in I} \in I$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $I \triangleleft R$, τότε το σύνολο $R/I = \{I+r \mid r\in R\}$ με τις προηγούμενες πράξεις γίνεται δακτύλιος

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Πρέπει να δείξουμε τις ιδιότητες του δακτυλίου $(R/I,+)$ στον πηλίκο ομάδων είναι αντιμεταθετική ομάδα 1) προσεταιριστική,

2) Επιμεριστική $((I+r_1)(I+r_2))(I+r_3) = (I+r_1r_2)(I+r_3) = I+(r_1r_2)r_3 = I+r_1(r_2r_3)) $
$(I+r_1)((I+r_2)(I+r_3))$

$(I+r_1)((I+r_2)+(I+r_3)) = (I+r_1)(I+(r_2+r_3)) = I+r_1(r_2+r_3) = I+r_1r_2+r_1r_3 =$
$= (I+r_1r_2)+(I+r_1r_3) = (I+r_1)(I+r_2)+(I+r_1)(I+r_3)$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Αν ο R έχει κάποια έξτρα ιδιότητα (αντιμεταθετικός, μοναδιαίος, διαιρετικός, ακέραια περιοχή, σώμα), τότε την κληρονομεί και το πηλίκο;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν ο R είναι μοναδιαίος και ένα ιδεώδες I περιέχει το 1, τότε $I=R$

$\forall r\in R \Rightarrow r=r\cdot 1,\ 1\in I \Rightarrow r\cdot 1\in I$

ΟΡΙΣΜΟΣ: 1) Ένα ιδεώδες θα καλείται **κύριο**, αν $I\neq \{0\}, R$.

2) Θα καλείται **πρώτο**, όταν $r_1r_2\in I \Rightarrow r_1$ ή $r_2\in I$

3) Θα καλείται **μέγιστο**, αν είναι κύριο και το μόνο ιδεώδες που το περιέχει είναι ο R.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathbb{Z} \triangleright \kappa\mathbb{Z}$

$\{0\}$ όχι κύριο, πρώτο, όχι μέγιστο

Πρώτα και κύρια στο $\mathbb{Z}$: $p\mathbb{Z}$ όπου p πρώτος

$\kappa\mathbb{Z}$, $\mu\lambda\in\kappa\mathbb{Z} \Rightarrow \mu\lambda=\kappa n \Rightarrow \mu$ ή $\lambda\in\kappa\mathbb{Z}$

Πρέπει κ να είναι πρώτος αριθμός

• Να είναι μέγιστο

$\kappa\mathbb{Z}(\neq\{0\}) \subsetneq \lambda\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$6\mathbb{Z} \subsetneq 3\mathbb{Z}$

$\subsetneq 2\mathbb{Z}$

$\kappa\mu=\lambda n$

$\downarrow$

$p_1^{\kappa_1} p_2^{\kappa_2} \dots p_l^{\kappa_l}$

Αν $\kappa\mathbb{Z} \subsetneq \lambda\mathbb{Z} \Rightarrow \kappa\in\lambda\mathbb{Z}$

$\kappa=\lambda\nu \Rightarrow \lambda|\kappa$

Άρα, για να μην έχουμε $\kappa\mathbb{Z}\subsetneq\lambda\mathbb{Z}$ πρέπει κ πρώτος (να διαιρείται μόνο από τον εαυτό του)

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\{0\}$ πρώτο, όχι μέγιστο

Αν $\kappa\mathbb{Z}$ πρώτο, $\kappa\neq 0 \Leftrightarrow$ μέγιστο.

Όχι πρώτο $4\mathbb{Z}$, $2\cdot 2\in 4\mathbb{Z}$ αλλά $2\notin 4\mathbb{Z}$

$4\mathbb{Z}\triangleleft 2\mathbb{Z}$ δακτύλιος

$4\mathbb{Z}$ όχι πρώτο
Αλλά $4\mathbb{Z}$ μέγιστο στο $2\mathbb{Z}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το πηλίκο R/I δεν έχει μηδενοδιαιρέτες <u>ανν</u> I πρώτο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Να δείξουμε ότι I πρώτο ιδεώδες $\Leftrightarrow r_1 r_2 \in I \Rightarrow r_1$ ή $r_2 \in I$.
Υποθέτουμε ότι, ενώ $r_1 r_2 \in I$, $r_1, r_2 \notin I$

$(I+r_1) \neq I \neq (I+r_2)$

$\underset{\neq 0}{(I+r_1)}\underset{\neq 0}{(I+r_2)} = I + r_1 r_2 = \underset{= 0}{I}$ Αδύνατο. $\oplus$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathbb{Z} \triangleright p\mathbb{Z}$, p πρώτος
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ σώμα, όχι μηδενοδιαιρέτες.

$\mathbb{Z} \triangleright 4\mathbb{Z}$ όχι πρώτος.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$ έχει μηδενοδιαιρέτες

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω ο R να είναι αντιμεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος. Το πηλίκο R/I είναι ακέραια περιοχή <u>ανν</u> I, πρώτο ιδεώδες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αρκεί R αντιμεταθετικός μοναδιαίος $\Rightarrow R/I$ αντιμεταθετικός μοναδιαί
$(I+r_1)(I+r_2) = I + r_1 r_2 \underset{\oplus}{=} I + r_2 r_1 = (I+r_2)(I+r_1)$

$(I+r)\underbrace{(I+1)}_{\text{μοναδιαίο}} = I + r \cdot 1 = I + r$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z} \oplus \{0\} \triangleleft \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$(\kappa, \lambda) \cdot (\mu, 0) = (\kappa\mu, 0)$
Πρώτο: $(\kappa, \lambda)(\kappa', \lambda') \in \mathbb{Z} \oplus \{0\} \Rightarrow (\kappa\kappa', \lambda\lambda') \in \mathbb{Z} \oplus \{0\} \Rightarrow \lambda\lambda' = 0 \Rightarrow \lambda$ ή $\lambda' = 0$.
είναι πρώτο και κύριο